第7回　理学部門談話会

日時：　2012年7月18日（水）
　　　　13：30-15：00
場所：　理学部第１会議室（理学部２号館6F）

話題及び提供者

「繰り返しから生じる安定と混沌　複素力学系概説 」
（諸澤　俊介 ）

「世界最高圧力下での微視的物性測定を目指して 」
（北川　健太郎 ）

「高知沖の深海魚 」
（遠藤　広光 ）

教職員，大学院生，学生，一般の方々のご来場をお待ちしています．

（問い合わせ：suzuki@kochi-u.ac.jp）

理学部門研究談話会
2012 年 7 月 18 日

繰り返しから生じる安定と混沌
複素力学系概説

理学部　数学コース
諸澤　俊介

X 上で定義された関数列 $\{f_n\}$ が X 上で広義一様収束するとは X の任意のコンパクト集合上で $\{f_n\}$ が一様収束する時をいう。X 上で定義された関数族 $\mathcal{F}$ が正規族であるとは $\mathcal{F}$ の任意の関数列が、その中に広義一様収束する部分列を含む時をいう。

複素平面 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付け加えたものを $\widehat{\mathbb{C}}$ で表し、複素球面と呼ぶ。複素関数 f が有理関数とは共通因子を持たない二つの多項式 P と Q の比であらわされるものをいう。今、f の次数を $d = \max\{\deg P,\ \deg Q\}$ で定義すると、f は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ の上への $d:1$ の写像である。$w \in \widehat{\mathbb{C}}$ のどのような近傍でも f が一対一にならないとき w を f の臨界点と呼ぶ。w と $f(w)$ がともに $\mathbb{C}$ に含まれる時は $f'(w) = 0$ となることと同値である。次数 d の有理関数は重複をこめて $2d-2$ 個の臨界点を持つ。f の n 回の合成を f^n と書く。また f^0 は恒等写像とする。関数族 $\{f^n\}_{n=0}^{\infty}$ を研究対象とするのが（有理関数 f の）複素力学系である。

$$\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid z \text{ の適当な近傍で } \{f^n\} \text{ が正規族となる。}\}$$

を f のファトウ集合と呼び $F(f)$ で表す。また、その補集合 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ をジュリア集合と呼び $J(f)$ で表す。$F(f)$ は開集合であり、$J(f)$ は閉集合となる。いずれも f のもとで完全不変となる。$F(f)$ は空集合であるか、ひとつ、ふたつ、あるいは無限個の成分からなる。ファトウ集合の成分をファトウ成分と呼ぶ。$J(f)$ は空集合となる事は無く、それが内点を持てば $\widehat{\mathbb{C}}$ と一致する。

$w \in \widehat{\mathbb{C}}$ が自然数 p について $f^p(w) = w$ を満たす時に周期点と呼ぶ。また、この式を満たす最小の自然数をその周期点の周期と呼ぶ。周期 1 の周期点を不動点と呼ぶ。周期 p の周期点 w に対して $\lambda = (f^p)'(w)$ をその乗法因子と呼ぶ。$|\lambda| < 1$ となるとき w を吸引周期点、$|\lambda| = 1$ となるとき中立周期点、$|\lambda| > 1$ となるとき反発周期点と呼ぶ。中立周期点は $\lambda = e^{2\pi it}$ と表した時に t が有理数の時は有理的中立周期点、t が無理数の時は無理的中立周期点と呼ぶ。吸引周期点はファトウ集合に含まれる。有理的中立周期点はジュリア集合に含まれる。無理的中立周期点はファトウ集合に含まれるものもあれば、ジュリア集合に含まれるものもある。反発周期点は常にジュリア集合に含まれる。さらに反発周期点の集合はジュリア集合の中に稠密に存在することが知られている。また、ジュリア集合と交わる任意の開集合 U に対し、適当な自然数 N があり、$f^N(U) \supset J(f)$ となることがわかっている。

ファトウ集合は完全不変であるから、そのファトウ成分 D に対して $f(D)$ もまたファトウ成分である。今、ファトウ成分 D が自然数 p について $f^p(D) = D$ を満たす時に周期成分と呼ぶ。また、この式を満たす最小の自然数を、その周期成分の周期と呼ぶ。周期 1 の周期成分を不変成分と呼ぶ。任意の自然数 N について $F(f) = F(f^N)$ が知られているので、周期成分については不変成分を調べれば良いことになる。不変成分は次のいずれかである。
(1) 吸引不動点を含む吸引成分。この中には少なくともひとつ臨界点が存在する。
(2) その境界に有理的中立不動点を含み、反復合成によりその中からその点に収束する放物型成分。この中には少なくともひとつ臨界点が存在する。
(3) 無理的中立不動点を含み、単位円板と等角同値で、その上での作用は単位円板上の無理数回転と共役となるジーゲル円板。その境界は臨界点の前方軌道の閉包に含まれる。

(4) 円環と等角同値で、その上での作用は円環上の無理数回転と共役となるエルマン環。その境界は臨界点の前方軌道の閉包に含まれる。

周期成分と臨界点には関係があるので臨界点の挙動を調べることは複素力学系において重要な意味を持つ。周期成分でなく、何回か反復合成で移した時に周期成分となるファトウ成分を前周期成分と呼ぶ。周期成分でもなく、前周期成分でもないファトウ成分を遊走領域と呼ぶ。有理関数の力学系では遊走領域は存在しないことが知られている。したがって、ファトウ成分は何回か写像すれば適当な周期成分に移ることがわかる。すなわちファトウ集合上の関数の反復合成による作用は安定なものと考えることができる。

距離空間 $(X,\ d)$ 上に関数 $f : X \to X$ が定義されているとする。このとき f の X への作用がカオス的であるとは次の３条件を満足する時をいう。

(C1) f の周期点は X 上に稠密に存在する。

(C2) f は推移性を持つ。すなわち、X 上の任意の開集合 U と V に対し、ある自然数 N で $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$ となるものが存在する。

(C3) f は初期値に関する過敏性を持つ。すなわち、ある $\delta > 0$ が存在し、任意の $x \in X$ をとると、その任意の近傍にはある点 y が存在し、適当な自然数 N で $d(f^N(x),\ f^N(y)) > \delta$ となる。

今までに述べたジュリア集合の性質から、有理関数 f のジュリア集合 $J(f)$ への作用はカオス的であることがわかる。

$c \in \mathbb{C}$ に対し $f_c(z) = z^2 + c$ を考える。f_c の臨界点は 0 と ∞ である。また、∞ は f_c の吸引不動点である。したがって $\{f_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ の挙動を調べることで f_c の力学系の性質を知ることができる。

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid \ \{f_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty} \text{ が有界集合 } \}$$

と定義し、マンデルブロー集合と呼ぶ。これは閉集合である。有理関数 f の臨界点の集合を C_f とし、その前方軌道を $C^+(f) = \cup_{n=0}^{\infty} f^n(C_f)$ とする。$J(f) \cap \overline{C^+(f)} = \emptyset$ であるとき f を双曲型と呼ぶ。双曲型有理関数の周期成分は吸引成分のみである。またそのジュリア集合は比較的扱いやすい性質を持っている。f_c が双曲型であるとき、c を少し変化させても双曲型のままであることは容易にわかる。$\mathcal{M}$ の内点の成分で、その点に対応する関数が双曲型となるものを双曲成分と呼ぶ。１９８０年代から始まった複素力学系の研究で最も重要な未解決問題は次のものである。

HD2 予想　$\mathcal{M}$ の内部の成分はすべて双曲成分である。

この予想は次の予想が正しければ正しいことが知られている。

MLC 予想　マンデルブロー (Mandelbrot) 集合の境界は局所連結 (Locally Connected) である。

参考文献

[1] A. F. Beardon, Iteration of Rational Functions,” Graduate Text of Mathematics 132, Springer-Verlag, 1991.

[2] L. Carleson and T. W. Gamelin. Complex dynamics. Springer, New York, 1993.

[3] J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable (Third Edition), Annals of Mathematical Studies, Number 160, Princeton University Press, 2006.

[4] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, T. Ueda, Holomorphic Dynamics, Cambridge Univ. Press, 2000.

[5] N. Steinmetz, Rational Iteration,” de Gruyter Studies in Mathematics 16,Walter de Gruyter, 1993.

世界最高圧力下での微視的物性測定を目指して

理学部門物理科学コース　講師　北川健太郎

大げさに言えば、極限環境技術の進歩は、物性物理上の華である新現象の発見一例えば、超伝導・超流動、量子ホール効果一にそのまま結びついてきた。代表的極限環境としては、極低温・強磁場などが挙げられるが、物性測定としてはかなり成熟している。一方高圧力は、時に劇的に物性の基底状態を制御させるパラメータとなる。このような状態相図における物性制御法は、超伝導研究などの強相関電子分野において最も基本的な研究行為である。

実は、地球中心部に相当するような数100 GPa（万気圧）の極限的な超高圧力は既に実現されており、その環境下で実験できれば物性物理としては何も言うことはない。しかしながら、実際にまともな物性測定が行えるのはそれよりずっと低い圧力である。試料体積の問題があるため、マクロ磁性測定はせいぜい20 GPa程度までしか実用化できていない。また、核磁気共鳴（NMR）や中性子散乱の微視的測定手段は3 GPaまでしか殆ど用いられて来なかった。故に、多くの物質系で相転移を引き起こせるような、10 GPa超級の微視的測定手段が求めれていた。

今回ご紹介するのは、講演者が今まで開発してきた、ほぼ初となる10 GPa超級の超高圧下NMR測定技術と、それを用いた鉄系高温超伝導の研究である。

NMR法は磁性・超伝導の両方をin-situで測定可能な希な微視的測定である。従って、純良な未ドープの単結晶試料を用いて圧力をパラメータとしてNMR研究を行えば、磁性と超伝導の競合・共存という非常にホットな話題において決定的な実験結果を得ることが可能である。故に3 GPaまではほぼ全ての研究室と言っていいほど盛んに研究されているが、それ以上となると技術的課題が大きかった。具体的には、

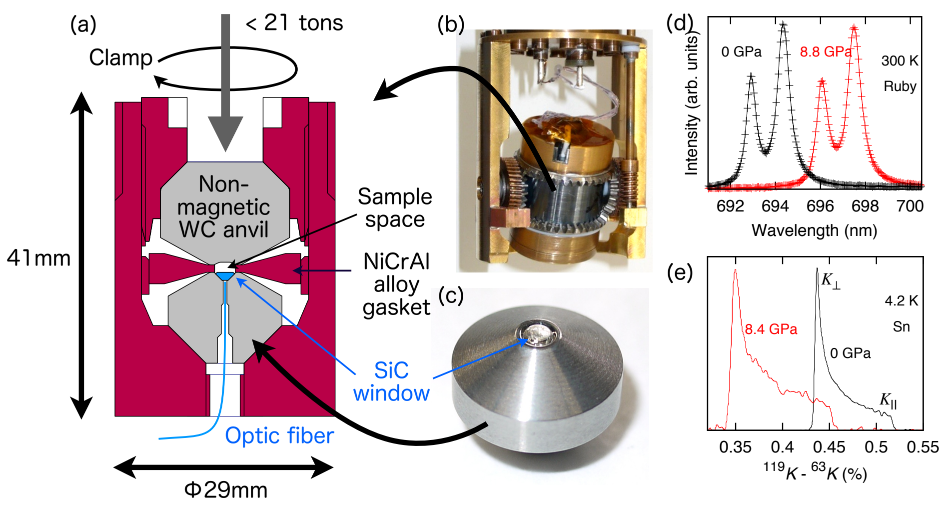

図１：新開発の体積効率の良い高圧セル[1]。(a)断面図 (b) ２軸回転機構 (c)光学窓を装備したWCアンビル (d)アルゴン媒体中でのルビー蛍光スペクトル (e)金属スズのNMRスペクトル。これらの圧力変化が圧力計として使用可能である。

i) 磁場均一性を保つための非磁性材料、ii) 十分なS/Nの為の大試料室容積、iii) 小型クランプセル、iv)良好な静水圧性、v)正確な圧力決定、などに課題があった。この高圧装置（図１）は、NMRに適した装置を新たに開発することで、それら全てに対して一定の解決を行なったものである[1]。

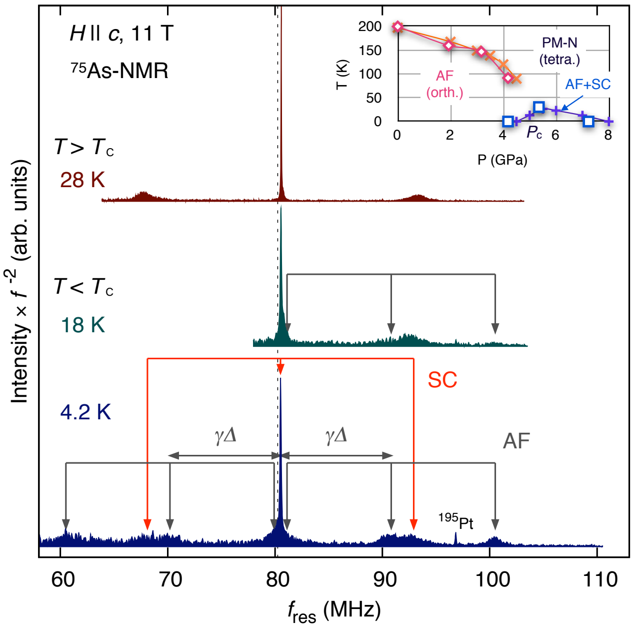

図2：5.4 GPaにおける$SrFe_2As_2$の^{75}As-NMRスペクトル。T_c直上の28 Kでは中心線は極めて鋭く、試料全体が常伝導常磁性相である。4.2 Kでは、ストライプ型反強磁性相（AF)と常磁性超伝導相（SC)が共存する。

一方、鉄系超伝導体は、4年前に新たに発見された高温超伝導物質である。転移温度は最大で55 Kと、銅酸化物系に比べれば低いが、鉄の磁性が超伝導発現機構に関与している可能性が高いために非常に高い注目を浴びている。また、未ドープでは基本的に反強磁性体であるため、超伝導発現は反強磁性と隣合わせである。しかしながら、多くの研究は、不純物ドーピングにより超伝導発現によるものであり本質を観測するのは難しいので、我々は、未ドープの$SrFe_2As_2$単結晶試料に対して超高圧下超伝導状態のNMR実験を行なった[2]。図２に示すように、微視的実験を行うと、この状態が単一の超伝導相ではなく、同一転移温度以下で超伝導相と反強磁性相が共存して出現する状態であることが初めて分かった。

このように初めて可能になった実用的な超高圧力NMR技術は、鉄系超伝導体のようなｄ電子系の圧力誘起超伝導の実験に必要とされていること、他の微視的な磁性測定手段が余り存在しないことから、今後の磁性と超伝導の研究に非常に重要であると考えられる。また、Big Scienceの対極にあるような小型装置でもユニークで最先端の研究が行えるというメリットがある。現在、高知大において超高圧NMR測定環境を整備中であるが、その進捗状況も報告したい。

本研究は、 特に、東大物性研の瀧川仁、片山尚幸、大串研也、 後藤弘匡、八木健彦、松本健彦、松林和幸、上床美也各氏との共同研究であります。

[1] KK et al., J. Phys. Soc. Jpn. 79, 024001 (2010). [2] KK et al., PRL 103, 257002 (2009).

「高知沖の深海魚」　　　　　　　　　　　海洋生物学研究室　遠藤広光

高知沖の深海底生性魚類の分類学的研究は，蒲原稔治博士（1901–1972）により，旧制高知高校へ着任した 1928 年から開始された．研究用標本は，おもに高知市御畳瀬の大手繰り網漁（沖合底びき網，水深 150–400 m）で得られたもので，御畳瀬魚市場は現在も深海魚のおもな入手先である．蒲原博士は 52 新種を記載し，現在 43 種が有効種とされる．それらのうち，高知沖の新種は 35 種であった．蒲原博士は 1938 年の目録で高知沖の深海魚 434 種を報告し，1952 年には追加種を含め 569 種を掲載した. これは蒲原博士が 1964 年に出版した高知県産魚類目録改訂版の 1,233 種の 46%にあたる. その後の研究は岡村 収博士（1933–2008），町田吉彦博士へと引き継がれた．1997 年から 2000 年に行われた国立科学博物館，水産研究所と高知大学との共同調査結果と過去の文献情報を含め, 2001 年の研究報告には土佐湾の水深 100–1,000m から記録された 140 科 599 種が掲載された．その後も高知沖の標本に基づく新種記載や日本初記録種の報告が続いている．今回は蒲原博士以降，現在に至るまで高知沖で採集された標本を基に命名された種，あるいは未記載種について紹介する．

Glossanodon microcephalus Endo and Nashida, 2012 ツマリニギス
(ニギス目ニギス科)，NSMT-P 106647，ホロタイプ，標準体長 97 mm.
＊国立科学博物館の新種記載プロジェクト論文集の第 6 弾（2012 年 3 月 30 日付で出版）で新種記載した“沖うるめ”の仲間.