

# 第15回 理学部門研究談話会

日時 : 平成27年1月21日(水) 13:30 - 15:00

場所 : 理学部2号館6階第1会議室

## 話題及び提供者

『 格子上の素粒子物理学 』

石黒克也

『 減少結合型評価に関するマルコフ決定過程 』

大坪義夫

『 高知大発重い電子系 $\text{CeRu}_2\text{Al}_{10}$ の新奇相転移 』

松村政博

教職員, 大学院生, 学生, 一般の方々のご来場をお待ちしております  
(お問い合わせ : [tsue@kochi-u.ac.jp](mailto:tsue@kochi-u.ac.jp))

# 格子上の素粒子物理学

石黒克也

素粒子物理学は、自然界の基本構成要素およびそれらの間に働く基礎法則を探求する学問である。自然界に存在する基本相互作用には、電磁相互作用、強い相互作用、弱い相互作用、重力相互作用と呼ばれる 4 種類の相互作用が存在することが知られており、素粒子とそれらの間に働く相互作用の理論は、相対論と量子論を基礎とする相対論的場の量子論（以下場の理論）で記述される。場の理論は自由度が無限大の系を扱うため、厳密に計算を実行するには様々な困難を伴い、多くの場合、相互作用の次数により展開する摂動論の方法などが用いられる。しかしながら、現実の世界には摂動論では取り扱うことのできない物理現象が存在し、非摂動的な手法が理論の理解には不可欠である。場の理論を格子上で定義する「格子上の場の理論」は、非摂動的な計算を実行できる理論であり、コンピュータを用いた数値計算と組み合わせることにより、現在の素粒子物理学を推進する強力な手法の 1 つとなっている。広範な素粒子物理学の中の「強い相互作用」を例にして、「格子上の場の理論」の一端を紹介する。

減少結合型評価に関するマルコフ決定過程  
数学コース：大坪義夫

減少結合演二項演算子による評価関数を定義し、その最適値関数が最適方程式での一意解となること、

最適左連続政策が存在することを示し、値反復法を与える。

そしてその値反復法にしたがって政策反復手順を実行し、最適値、最適政策を決定する。

離散時間空間  $N = 0, 1, 2, \dots$  において

$$\Gamma = ((X_n), (A_n), (Y_n))$$

からなるマルコフ決定過程を定式化する。状態空間  $S$  は可算集合、 $G(\subset S)$  は目標集合とし、 $X_n$  は時間  $n(\in \mathbb{N})$  での状態とする。

行動空間  $A$  は有限集合とし、 $A_n$  を時間  $n(\in \mathbb{N})$  での有限集合とする。

利得空間  $E$  は可算な有界集合、 $E \subset B(\mathbb{R}$  のある部分集合) とし、

$Y_n$  は時間  $n$  でのランダムな利得関数とし、単位元を  $Y_0 = e$  とする。

条件付確率分布を次のように定義する。  $i, j \in S, a \in A, y \in E$  に対して、

$$\begin{aligned} q^a(j|i) &= P(X_{n+1} = j | X_n = i, A_n = a) \\ \hat{q}_{ij}^a(y) &= P(Y_{n+1} = y | X_n = i, X_{n+1} = j, A_n = a) \\ p^a(j, y|i) &= q^a(j|i) \cdot \hat{q}_{ij}^a(y) \\ &= P(X_{n+1} = j, Y_{n+1} = y | X_n = i, A_n = a) \end{aligned}$$

新たな状態空間として  $S_B$  を

$$S_B = S \times B$$

として用いる。

減少結合型二項演算子  $\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  の部分集合  $B$  に対して、以下を定義する。

(i) 演算子  $\circ$  に対して  $B$  は閉じている。すなわち、任意の  $x, y \in B$  に対して

$$x \circ y \in B$$

(ii) 演算子  $\circ$  は結合法則が成り立つ。すなわち、任意の  $x, y, z \in B$  に対して

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \quad (= x \circ y \circ z \text{ と表す})$$

(iii)  $B$  は単位元を持つ。すなわち、任意の  $x \in B$  に対して

$$e \in B, \quad x \circ e = e \circ x = x$$

(iv)  $(B, \circ)$ : 非増加。すなわち、任意の  $x, y \in B$  に対して (iv)  $(B, \circ)$ : 非増加。すなわち、任意の  $x, y \in B$  に対して

$$x \geq x \circ y, \quad x \geq y \circ x$$

例

(1) (加法型) 定数  $L, M (-\infty < L < M < \infty)$  に対して

$$x \circ y = \max(L, x + y - M)$$

(2) (乗法型) 定数  $L > 0$  に対して

$$x \circ y = Lxy$$

(3) (Min 型) 定数  $L, M (L < M), x, y \in [L, M]$  に対して

$$x \circ y = \min(x, y)$$

(4) (乗法をもつ加法型) 定数  $L > 0$  に対して

$$x \circ y = x + y + Lxy$$

(5) (分数型) 定数  $L > 0$  に対して

$$x \circ y = \frac{x + y}{1 + Lxy}$$

(6) (極端な max 型) 定数  $L < M, x, y \in [L, M]$  に対して

$$x \circ y = \begin{cases} \min(x, y) & \max(x, y) = M \\ L & \text{その他} \end{cases}$$

(7) (hamacher 型)  $x, y \in [-1, 0]$  に対して

$$x \circ y = y \frac{x + y + 2xy}{1 - xy}$$

ここで時刻  $n$  でのランダム利得を  $Z_n = \bigcirc_{k=0}^n Y_k (Y_k \in E)$ ,  $\lambda$  を埋め込みパラメータ, 決定ルール  $\delta_n(a_n|h_n) = P(A_n = a_n|\theta_n = h_n) (A_n \in A, h_n \in H : \text{ヒストリー})$  とする. また, モデルを解析するために有限期間と無限期間の場合に対して評価関数を  $V_n^\pi(i, \lambda) = E_i^\pi[\lambda \circ Z_n]$ ,  $V^\pi(i, \lambda) = E_i^\pi[\lambda \circ Z]$  最適値関数を  $V_n^*(i, \lambda) = \sup_{\pi \in C} V_n^\pi(i, \lambda)$ ,  $V^*(i, \lambda) = \sup_{\pi \in C} V^\pi(i, \lambda)$  とする. また次の関数の集合  $\mathcal{F}, \mathcal{F}_l$ , 演算子  $T^a, T^\delta, T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  を次のように定義する

$V \in \mathcal{F} : S_B \rightarrow B$  s.t. 各  $i \in S$  に対して,  $V(i, \cdot) : B$  上で可測, 各  $\lambda \in B$  に対して,  $V(\cdot, \lambda) : \text{有界}$   
各  $(i, \lambda \in S_B)$  に対して,  $V(i, \lambda) \leq \lambda$

$\mathcal{F}_l : v \in \mathcal{F}$  の集合 s.t. 各  $i \in S_B$  に対して,  $V(i, \cdot) : B$  上で非減少, 左連続

$$T^a V(i, \lambda) = \sum_{j \in S} \sum_{y \in E} V(j, \lambda \circ y) p^a(j, y|i) \quad T^\delta V(i, \lambda) = \sum_{a \in A(i)} T^a V(i, \lambda) \delta(a|i, \lambda)$$

$$TV(i, \lambda) = \sup_{\delta \in \Delta} T^\delta V(i, \lambda) = \max_{a \in A(i)} T^a V(i, \lambda)$$

補題 1  $\pi \in C_D^S$  : (定常政策の集合) を次のような性質をみたす政策とする.

各  $(i, \lambda) \in S_B$  に対して  $\exists$  定数  $M > 0$  s.t.  $P_{(i, \lambda)}^\pi(\lambda \circ Z \geq M) = 1$  と仮定する

( )  $V_1, V_2 \in \mathcal{F}$  とする.  $G^C \times B$  上で  $V_1 - V_2 \geq T^\delta(V_1 - V_2)$ ,  $G \times B$  上で  $V_1 = V_2$  のとき,  $S_B$  上で  $V_1 \geq V_2$ .

( )  $V^\pi : \mathcal{F}$  の中で一意解 s.t.  $V = T^\delta V, \forall \lambda \in B, \forall i \in G, V(i, \lambda) = \lambda$

定理 1  $\forall \sigma \in C$ , 各  $(i, \lambda) \in S_B$  に対して  $\exists M > 0$  s.t.  $P_{(i, \lambda)}^\pi(\lambda \circ Z \geq M) = 1$  と仮定する.

( )  $V^*$  は  $\mathcal{F}$  での次の一意解が存在する.  $\begin{cases} V = TV \\ V(i, \lambda) = \lambda, i \in G \end{cases}$

( )  $G \times B$  上で  $V^* = T^\delta V^*$  を満たす左連続政策

$\pi^{\delta \infty} \in C_D^S$  が存在し,  $\pi$  は最適政策である.

よって各  $(i, \lambda) \in S_B$  に対して  $V^* = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n V_0^*$  という値反復法が与えられる.

定理 2  $\forall \sigma \in C$ , 各  $(i, \lambda) \in S_B$  に対して  $\exists$  定数  $M > 0$  s.t.  $P_{(i, \lambda)}^\pi(\lambda \circ Z \geq M) = 1$ , 政策反復手順に従うと仮定する.

( )  $\{V^{\pi_n}\}$ : 非減少,  $V^*$  に収束.

( )  $T^{\delta_n} V^{\pi_n} = TV^{\pi_n}$  のとき,  $V^{\pi_n}$  : 最適値,  $\pi_n = (\delta_n)^\infty \in C_D^S$  : 最適政策

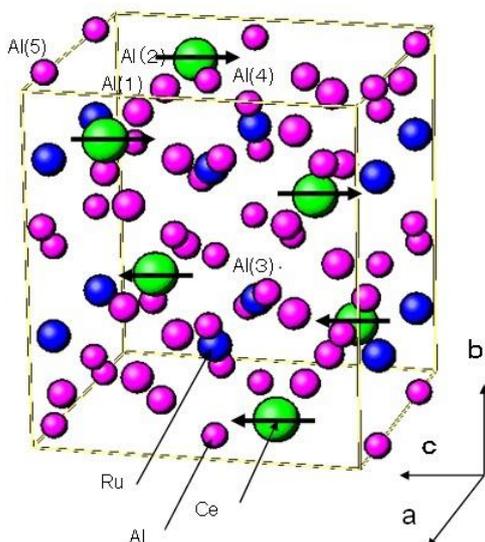
## 高知大発重い電子系 $\text{CeRu}_2\text{Al}_{10}$ の新奇相転移

物理科学コース 松村政博

一般に、希土類原子は内殻の不完全 4f 電子殻に由来する原子磁気モーメントを持ち、これが局在磁性イオンとして多くの希土類化合物の磁性を担っている。しかし、4f 電子 1 個の Ce 化合物の場合には f 電子が局在と遍歴の狭間に来ることがあり、この時の電子比熱の異常な増大から Ce 化合物のある一群は重い電子系と呼ばれている。

$\text{CeRu}_2\text{Al}_{10}$  はこのような重い電子系のひとつである。2009 年に高知大の西岡研グループが良質単結晶育成に成功し、その新奇な特性を折から走り始めていた科研費「新学術領域研究」の研究会「重い電子系の形成と秩序化」で紹介し、一躍話題になった。2010 年にはこの研究会が「希薄 f 電子系の新しい秩序」として高知大で開催された。 $\text{CeRu}_2\text{Al}_{10}$  はいわば高知大発の重い電子系であり、現在でも物理学会の物性物理学の f 電子磁性のトピックスの一つとして多様な観点から活発に研究されている。

$\text{CeRu}_2\text{Al}_{10}$  は単位胞に Al 原子を多く含み、最隣接 Ce-Ce 磁性イオン間距離が  $5.2 \text{ \AA}$  もある希薄 f 電子系である。それにもかかわらず、 $T_0=27.3 \text{ K}$  という高温で反強磁性に相転移する。異常に高い転移温度は、ドニアック相図と呼ばれる重い電子形成の標準的描像とは適合し難い。標準的描像は f 電子局在スピと伝導電子スピ間の cf 交換相互作用の排他的な 2 つの効果に依拠しており、磁気秩序は cf 交換相互作用による伝導電子スピ分極を媒介とした Ce-Ce モーメント間相互作用 (RKKY 相互作用) により Ce-Ce 間距離の 3 乗に逆比例して減少し、2 桁程度低い  $T_0$  しか予言しない。また、単に  $T_0$  が高いというだけでなく、反強磁性相には標準的描像では理解しがたい新奇な特性も見出されている。反強磁性相の磁気モーメントの向きと常磁性相の磁化容易軸との不一致、反強磁性磁気モーメントと  $T_0$  の反相関等々、現状では謎が深まるばかりである。それらを含めて紹介する。



磁化率の温度変化

