第18回　理学部門研究談話会

日時　：平成28年 1月20日（水）13:30－15:00
場所　：理学部2号館6階第1会議室

話題及び提供者

『　ケーラー多様体上の曲線流がみたす
分散型偏微分方程式　』
小野寺栄治

『　高密度クォーク物質　』
津江保彦

『　魚の側線系とその神経の話　』
佐々木邦夫

教職員，大学院生，学生，一般の方々のご来場をお待ちしております。
（お問い合わせ　：　tsue@kochi-u.ac.jp）

ケーラー多様体上の曲線流がみたす分散型偏微分方程式[1]

小野寺 栄治（高知大学）

複数の独立変数をもつ関数とその偏導関数たちの間の関係式は偏微分方程式と総称される. 時間変数を含む偏微分方程式の数学解析において, 以下は基本的な研究対象である.

A. 任意の初期データに対して初期値問題の解は存在するか？
B. その解は一意的か？
C. その解は初期データに関して連続的に依存するか？
D. その解の挙動は？

偏微分方程式には型という概念があり, それぞれの型に応じて問題の取り扱い方や難易度が異なる. 特に, シュレーディンガー方程式や Korteweg-de Vries(KdV) 方程式のように, その平面波解の位相速度が波数に応じて異なるものは分散型と呼ばれる.

分散型偏微分方程式に関する A-D の問題についても膨大な先行研究があるが, その多くが複素数 (ベクトル) 値関数か実数 (ベクトル) 値関数を解にもつ方程式を扱っている. 一方で, 実 2 次元球面やより一般のリーマン面やケーラー多様体等に値をもつ関数がみたす方程式で, 分散型としての扱いが期待される例も存在する. 後者についてはこの 20 年程で偏微分方程式論と幾何解析との融合的視点から研究が進展を見せている.

本講演では, 後者の方面の研究の一端を大まかに紹介する予定である. 時間に余裕があれば, 講演者の最近の研究として以下の話題についても簡単に触れたい.

問題設定 N を複素構造 J とケーラー計量 g が付随したコンパクトなケーラー多様体 ($\nabla^N J = 0$, ここで ∇^N は Levi-Civita 接続) とする. N 上の曲線流がみたす次の 4 階非線型分散型偏微分方程式に対する初期値問題を考察する.

$$u_t = a\, J_u \nabla_x^3 u_x + \{1 + b\, g(u_x, u_x)\}\, J_u \nabla_x u_x + c\, g(\nabla_x u_x, u_x) J_u u_x \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times X, \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{in} \quad X, \tag{2}$$

ここで, $u = u(t, x)$ は $(t, x) \in \mathbb{R} \times X$ を独立変数とする N-値未知関数, X は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{T}(= \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $u_0 = u_0(x)$ は N-値初期関数, $u_t = du(\partial/\partial t)$, $u_x = du(\partial/\partial x)$, J_u は $u \in N$ での複素構造, ∇_x は u に沿う x 方向の共変微分, $a, b, c \in \mathbb{R}$ は定数で $a \neq 0$ とする.

N が標準的な実 2 次元球面 $\mathbb{S}^2$ で $c = -3a + 2b$ のとき, (1) は次の物理的背景をもつ.

- 1 次元古典スピン系の連続体近似モデル (Lakshmananann-Porsezian-Daniel(1988)):

$$\vec{u}_t = \vec{u} \wedge \left[\mu_1\, \vec{u}_{xxxx} + \vec{u}_{xx} + \mu_2 \left\{ (\vec{u}, \vec{u}_{xx})\, \vec{u}_{xx} + \frac{2}{3}\, (\vec{u}, \vec{u}_{xxx})\, \vec{u}_x \right\} \right] \tag{3}$$

  ここで, $\vec{u}(t, x) : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, $\wedge$ と $(\cdot, \cdot)$ はそれぞれ $\mathbb{R}^3$ の外積と内積, $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \in \mathbb{R}$ は定数. (3) は (1) の形に再定式化される. ここで, $(N, J, g) = (\mathbb{S}^2, \vec{u}\wedge, (\cdot, \cdot))$, $u = \vec{u}$, $a = \mu_1$, $b = -\mu_1 - \mu_2$, $c = -5\mu_1 - 2\mu_2$.

- 渦糸曲線 (の速度ベクトルの) 運動モデル (Fukumoto-Moffatt(2000)):

$$\vec{\gamma}_t = \kappa \vec{b} + c_1 \left\{ \kappa^2 \tau \vec{\gamma}_x + (2\kappa_x \tau + \kappa \tau_x) \vec{n} + (\kappa \tau^2 - \kappa_{xx}) \vec{b} \right\} + c_2 \kappa^3 \vec{b} \tag{4}$$

  ここで, $\vec{\gamma}(t, x) : \mathbb{R}_t \times X \to \mathbb{R}^3$, x は弧長パラメータ ($|\vec{\gamma}_x| \equiv 1$), $(\vec{\gamma}_x, \vec{n}, \vec{b})$ は $\vec{\gamma}$ に沿った Frenet frame, κ と τ はそれぞれ $\vec{\gamma}$ に沿った曲率と捩率, $c_1 \neq 0, c_2 \in \mathbb{R}$ は定数. $\vec{u} := \vec{\gamma}_x$ は $\mathbb{S}^2$-値で (3) をみたす. ただし, $\mu_1 = -c_1$, $\mu_2 = 2c_1 - c_2$.

[1]理学部門研究談話会 (2016 年 1 月 20 日, 高知大学) 講演要旨

本講演では, $X = \mathbb{T}$ の場合 (u が閉曲線運動をあらわす場合) に限って, 初期値問題 (1)-(2) の解の存在と一意性を考察する. (N, J, g) の設定と (1) の偏微分方程式系としての構造との関係を調べて証明に応用することが研究の本質的部分を占める.

困難な点

(i) 従来の 2 階や 3 階の分散型偏微分方程式に従う曲線流の研究では, (N, J, g) がケーラー条件をみたすことにより, 共変微分を用いたソボレフノルム

$$\|u_x\|^2_{H^k(X;TN)} = \sum_{l=0}^{k} \|\nabla_x^l u_x\|^2_{L^2(X;TN)} = \sum_{l=0}^{k} \int_X g(\nabla_x^l u_x, \nabla_x^l u_x) dx$$

に基づく古典的エネルギー法が機能し, 時間局所解の構成は容易であった. しかし, (1) は, 古典的エネルギー法では処理できない低階項を含む. (可微分性の損失)

(ii) $X = \mathbb{T}$ と設定することは, 実軸上の分散型偏微分方程式が持つ局所平滑化効果 (分散性により解の滑らかさが初期時刻よりも少し上がる性質) が期待できないので, 可解性のための余裕が少ない, より難しい設定をしていることに相当する.

先行研究 球面値モデルが完全可積分系になる場合における以下の結果に限られる.

- Guo-Zeng-Su(2007): $N = \mathbb{S}^2$, $c = -3a + 2b$, $c = 0 \Longrightarrow$ 時間局所的弱解の存在

a, b, c への制約により可算個の時間保存量が存在する. ある時間保存量の評価を行うことで可微分性の損失が解消されている. (解の一意性は未解決)

主結果 N がコンパクトな定曲率リーマン面ならば, 平滑化効果や可積分系性に頼らずに滑らかな時間局所解の存在と一意性が従うことがわかった. ($a \neq 0, b, c$ への制約は不要)

Theorem 1. ([2]) (N, J, g) は断面曲率一定のコンパクトリーマン面, $k = 6, 7, 8, \ldots$ とする. このとき, $u_0 \in C(\mathbb{T}; N)$ かつ $u_{0x} \in H^k(\mathbb{T}; TN)$ をみたす任意の u_0 に対し, ある $T = T(\|u_{0x}\|_{H^4(\mathbb{T};TN)}) > 0$ が存在して,

$$u \in C([-T,T] \times \mathbb{T}; N) \text{ かつ } u_x \in C([-T,T]; H^k(\mathbb{T}; TN))$$

をみたす (1)-(2) の時間局所解 u が一意的に存在する.

- 時間局所解の構成: 1. ある放物型近似方程式を解いて近似解の列を構成する.
  2. 近似解の存在時間とソボレフノルムの近似パラメータに関する一様評価をえる. (適当な "ゲージ変換" を組み合わせた評価を行い可微分性の損失を解消する.)
  3. コンパクト性の議論により解の存在が従う.
- 曲率が定数という仮定: (厳密ではないが)"ほぼ" 必要条件
- 一意性の証明: N を $\mathbb{R}^d$ に等長的に埋め込み, 2 つの解の差を $\mathbb{R}^d$-値関数として定義する. その差の 2 階導関数までの $L^2(\mathbb{T}; \mathbb{R}^d)$-ノルム評価とゲージ変換を組み合わせることによる. (1) を埋め込んだ方程式を調べることになるが, (方程式の階数が高いので) その方程式の非線形項が (1) よりも大幅に複雑化し, 古典的エネルギー評価の障害にならない項かゲージ変換で消すべき項かの判別が難解であった. そこで球面値モデルで様子見 ([1]) してから再考察して解決した.

参考文献

[1] E. Onodera, *The initial value problem for a fourth-order dispersive closed curve flow on the two-sphere*, submitted for publication.

[2] E. Onodera, *A fourth-order dispersive flow equation for closed curves on compact Riemann surfaces*, submitted for publication.

高密度クォーク物質

物理科学　　津江保彦

原子の大きさはおおよそ 10^{-10} m のオーダーであることが知られている。原子の中心には大きさがおおよそ $10^{-14} \sim 10^{-15}$ m 程度の原子核が存在し、原子の質量の大部分を担うが、大きさとして占めている領域は小さい。原子核は陽子と中性子からなるが、これらはさらにクォークと呼ばれる基本粒子が束縛されてできている。

クォークは「閉じ込め」と呼ばれる機構で、通常は単独では現れずに、陽子や中性子といった素粒子内部に閉じ込められているが、極めて高温、高密度の状況では単独で現れると考えられている。実際、近年の高エネルギー原子核衝突実験により、クォークとそれらを結合させるために必要なグルオンと呼ばれる粒子が多数存在する「クォーク・グルオン・プラズマ」状態が実現された。

高密度クォーク物質を考えることは、自然界に存在する４つの基本相互作用のうちの「強い相互作用」と呼ばれる相互作用が支配するクォークの世界を理解するため自身にも重要であることはもちろんであるが、現象としては中性子星などのコンパクト星の内部で実現されることを期待しても、興味深い研究対象であると考えられる。

今回は、簡単なオーダー評価をしてみて、大まかに桁があっていれば、定性的にはそこそこイケているものとして考えてみたい。

まず、中性子からなる中性子星は、パウリの排他原理から生じる中性子の縮退圧によって、自己重力に抗して存在していることを、大まかなオーダー評価で見る。だいたいの桁が出るので、おそらく、中性子星は中性子の縮退圧で存在できていると考えられる。

中性子星は 10^{12} G （ガウス）という大きな磁場を持つ。地球の表面磁場は 0.6 G 程度なので、極めて大きいことがわかる。この磁場は中性子星に進化する前の親星の磁場から生じているとしても磁場の桁としてはおおまかに説明できるが（化石磁場仮説）、親星自身のことや中性子星への進化の過程での不定性が多く、磁場の起源は詳しく知られていないのが現状である。さらに、親星の磁場から生じるという単純な描像では決定的に説明できないものとして、星の磁場が 10^{15} G にも及ぶ中性子星が発見され、「磁石星」の名で呼ばれている。

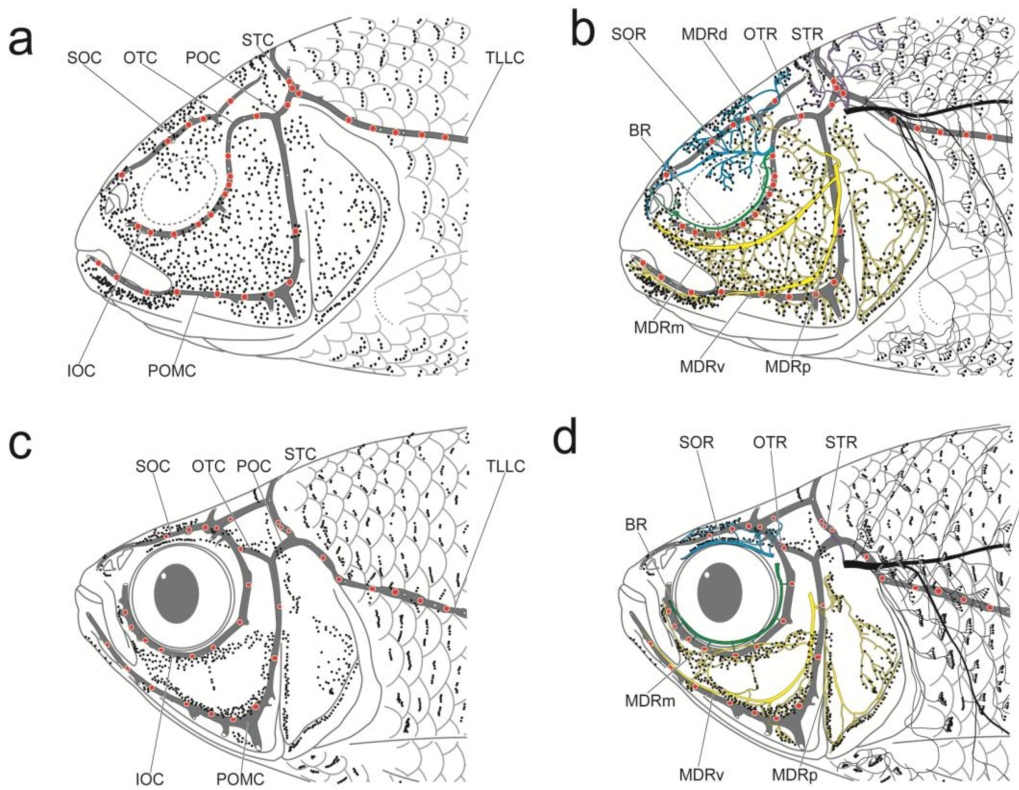
中性子星の内部の構成粒子の磁気能率の向きが揃い、巨大な磁石になっているとすれば 10^{15} G の磁場を持たせられることが簡単なオーダー評価でわかる。そこで、ここでは、中性子星の内部にクォーク物質が存在すると仮定し、クォークのスピンがそろった場合に、コンパクト星自身が巨大な磁石のようになることを想定した最近の我々の結果を紹介する。

魚の側線系とその神経の話

生物科学　佐々木邦夫

アジを食べるとき、からだの脇にならぶ尖った鱗が邪魔である。「ぜいご」と称されるこれらの鱗は側線鱗であり、側線鱗のつらなりが一般には側線とよばれる。側線系とは水中の流れを感知する系であり、有毛細胞の集合体である感丘が受容器として機能する。からだの側線は側線系の一部にすぎず、頭部でも側線系はよく発達する。

ここ数年、学生さんたちと一緒に側線系とその神経支配について、様々な魚を材料に観察してきた。感丘、とくに表皮上にある表在感丘は脱落しやすく、固定標本では観察が困難であった。わたしたちは従来発生学の分野で幼生に用いられてきた生体染色の手法を成魚に応用し、生きた魚が手に入れば片端から染色をしてきた。同時に、従来ほとんど知見のなかった側線系の神経支配についても観察を継続してきた。今回は様々な環境に生息する魚類における側線系の多様性の一端を神経も含め紹介したい。



Astyanax mexicanus の地下タイプ(a, b)と地上タイプ（c, d)。赤点は管器感丘、黒点は表在感丘。b と d は神経支配。地下タイプは「ブラインドケーブフィッシュ」として市販。地上タイプから地下タイプへの移行は数回にわたり平行して生じたらしい。図は Sumi et al.(2015)による。