第45回 理工学部門研究談話会

日時：令和 6年12月25日（水）13:30～14:30
場所：理工学部2号館6階第1会議室

話題及び提供者

『ある(1+1)次元4階分散型偏微分方程式の初期値問題』

小野寺 栄治

『太陽光パネル火災時の建物周辺の煙流動』

張 鑫

教職員，大学院生，学生，一般の方々のご参加をお待ちしております
（お問い合わせ： iida@kochi-u.ac.jp）

ある (1+1) 次元 4 階分散型偏微分方程式の初期値問題*

小野寺 栄治（数学物理学科 数学コース）

次の 2 種類の $(1+1)$ 次元 4 階非線形分散型偏微分方程式の初期値問題に対する適切性 (解の存在, 一意性, 初期値に対する連続依存性) を考察する.

A. 複素 n 次元コンパクトケーラー多様体 N 上の (時間パラメータ付き) 曲線がみたすある 4 階分散型偏微分方程式

B. 複素数値関数がみたすある空間 1 次元 4 階非線形分散型偏微分方程式およびその n-成分連立系 (非線形項に空間変数に関して 2 階までの偏導関数が含まれる)

以下はそれらの概要である. 談話会ではその一部もしくは関連内容を紹介したい.

A の初期値問題. N を複素構造 J とケーラー計量 h(および Levi-Civita 接続) が付随した複素次元 n のコンパクトケーラー多様体とする. 次の初期値問題を考察する.

$$u_t = a\, J_u \nabla_x^3 u_x + \lambda\, J_u \nabla_x u_x + b\, R(\nabla_x u_x, u_x) J_u u_x + c\, R(J_u u_x, u_x)\nabla_x u_x, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{2}$$

ここで $u = u(t,x) : \mathbb{R} \times X \to N$ が未知関数, X は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{T}(=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $u_0 = u_0(x) : X \to N$ は初期関数, $u_t = du(\partial/\partial t)$, $u_x = du(\partial/\partial x)$, J_u は $u \in N$ での複素構造, ∇_x は u に沿う x 方向の共変微分, $R(\cdot,\cdot)$ は N の曲率テンソル, $a \neq 0, b, c, \lambda \in \mathbb{R}$ は定数とする.

方程式 (1) の例として, 次の 2 つが挙げられる.

- $N = \mathbb{S}^2$(標準的な実 2 次元球面) で $c = 3(a-b)/2$ かつ $\lambda = 1$ のとき, (1) は次のモデル方程式を幾何学的に再定式化したものである.
  - 1 次元古典スピン系の連続極限モデル (Lakshmanann-Porsezian-Daniel(1988))
  - 渦糸の中心曲線の速度ベクトルの 3 次元運動モデル (Fukumoto-Moffatt(2000))
- N が局所エルミート対称空間で $c = 3(a-b)/2$ のとき, (1) は, Ding-Wang(Math.Z. (2018)) が提唱した Generalized bi-Schödinger flow の方程式と一致する.

$X = \mathbb{T}$(u が閉曲線運動をあらわす場合) と設定したとき, (1)-(2) の時間局所解の存在と一意性に関する研究は, 大まかには以下のようにまとめられる.

(i) Guo-Zeng-Su(J. Math. Anal. Appl. (2007)): $N = \mathbb{S}^2$, $c = 3(a-b)/2$, $b = 0$ かつ $\lambda = 1 \Longrightarrow$ 時間局所的弱解の存在

(ii) Onodera([3,4]): N: コンパクト局所エルミート対称空間 $\Longrightarrow$ 高次ソボレフ空間における時間局所解の存在と一意性 (Onodera([2]): $N = \mathbb{S}^2$ の場合)

<u>(ii) の補足</u>: 方程式の低階項により, 解の導関数 u_x が属する集合に対応する幾何学的ソボレフノルムに対する古典的エネルギー法が破綻する (可微分性の損失). また, $X = \mathbb{T}$ なので, $\mathbb{R}$ 上の分散型偏微分方程式の解に対する局所平滑化効果による可微分性の損失の解消は期待できない. そのため, 初期値問題が可解となるためには N や方程式の係数への強い制約が要ると予想された. (ii) は, N の局所エルミート対称性 ($\nabla J = \nabla R = 0$) がその種の制約をみたすための十分条件であることを示している. ((i) とは異なり, 方程式の係数への制約は要らない.) 解の存在は, ある種のゲージ変換のアイデアに基づいて修正した幾何学的ソボレフノルムに対する評価と放物型近似により示した. 解の一意性は, N を高次元ユークリッド空間に等長的に埋め込んでから, 2 つの解の差を評価することにより示した. その際に, ユークリッド空間の部分多様体として N の局所エルミート対称性を利用するための関係式を作ったことが証明の主要なアイデアである.

---

*理工学部門研究談話会 (2024 年 12 月 25 日, 高知大学) 講演要旨

B の初期値問題. 次の初期値問題を考察する.

$$\left(\partial_t - iM_a\partial_x^4 - iM_\lambda\partial_x^2\right)Q = F(Q,\partial_x Q,\partial_x^2 Q) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}\times\mathbb{T}, \tag{3}$$

$$Q(0,x) = Q_0(x) \qquad\qquad \text{in} \quad \mathbb{T}. \tag{4}$$

ここで, n は正の整数, $Q = {}^t(Q_1,\ldots,Q_n)(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{T}\to\mathbb{C}^n$ は未知関数, $Q_0 = Q_0(x) : \mathbb{T}\to\mathbb{C}^n$ は初期関数, $i=\sqrt{-1}$, $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $M_a = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$, $(a_1,\ldots,a_n)\in(\mathbb{R}\setminus\{0\})^n$, $M_\lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ である. また,

$$F(Q,\partial_x Q,\partial_x^2 Q) = {}^t(F_1(Q,\partial_x Q,\partial_x^2 Q),\ldots,F_n(Q,\partial_x Q,\partial_x^2 Q))$$

は非線形項で, 各 $j\in\{1,\ldots,n\}$ に対し, $F_j(u,v,w)$ は $u,\overline{u},v,\overline{v},w,\overline{w}\in\mathbb{C}^n$ の多項式で,

$$\begin{aligned}F_j(Q,\partial_x Q,\partial_x^2 Q) = {}& \sum_{p,q,r=1}^{n}\omega_{p,q,r}^{1,j}\partial_x^2 Q_p\overline{Q_q}Q_r + \sum_{p,q,r=1}^{n}\omega_{p,q,r}^{2,j}\overline{\partial_x^2 Q_p}Q_qQ_r \\ & + \sum_{p,q,r=1}^{n}\omega_{p,q,r}^{3,j}\partial_x Q_p\overline{\partial_x Q_q}Q_r + \sum_{p,q,r=1}^{n}\omega_{p,q,r}^{4,j}\partial_x Q_p\partial_x Q_q\overline{Q_r} \\ & + O(|Q|^3+|Q|^5)\end{aligned}$$

で与えられる. ここで, 各 $\omega_{p,q,r}^{k,j}$ $(p,q,r,j\in\{1,\ldots,n\},\, k\in\{1,\ldots,4\})$ は複素定数とする. 次の 2 条件 (A1) と (A2) を仮定しても一般性を失わない:

(A1) すべての $p,q,r,j\in\{1,\ldots,n\}$ に対し, $\omega_{p,q,r}^{2,j}=\omega_{p,r,q}^{2,j}$.
(A2) すべての $p,q,r,j\in\{1,\ldots,n\}$ に対し, $\omega_{p,q,r}^{4,j}=\omega_{q,p,r}^{4,j}$.

周期境界条件 ($x\in\mathbb{T}$) を課さなければ, (3) は幾つかのモデル方程式を例にもつ.

- $n=1$(単独方程式の場合) に対する (3) の例:

$$\begin{aligned}(\partial_t - i\nu\partial_x^4 - i\partial_x^2)q = {}& i\mu_1|q|^2q + i\mu_2|q|^4q + i\mu_3(\partial_x q)^2\overline{q} \\ & + i\mu_4|\partial_x q|^2q + i\mu_5 q^2\overline{\partial_x^2 q} + i\mu_6|q|^2\partial_x^2 q,\end{aligned} \tag{5}$$

  ここで, $q=q(t,x):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $\nu\neq 0$ と $\mu_1,\ldots,\mu_6$ は実数の定数.
  - 渦糸の中心曲線の 3 次元運動モデル (Fukumoto-Moffatt(J. Fluid. Mech.(2000)) に対する古典的 Hasimoto 変換の像としてえられる.
  - タンパク質の α-ヘリックス内の水素結合スパインに沿う分子励起のモデル (Daniel-Latha(Phys. Lett. A (1997))
- $n\geqslant 2$ に対する (3) の例:

$$\begin{aligned}Q_t = i\alpha\left(\frac{1}{2}Q_{xx}+QQ^*Q\right) + i\gamma\Bigg[&\frac{1}{2}Q_{xxxx} + Q(Q_x^*Q)_x + Q_xQ_x^*Q \\ & + 2(Q_{xx}Q^*Q + QQ^*Q_{xx}) + 3\left\{Q_xQ^*Q_x + Q(Q^*Q)^2.\right\}\Bigg]\end{aligned} \tag{6}$$

  ここで, $Q(t,x)={}^t(Q_1(t,x),\ldots,Q_n(t,x)):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}^n$, $\gamma\neq 0$ と α は実数の定数, “$*$” はエルミート転置をあらわす. (光ファイバー中の n 個の信号の伝播モデル (Weng-Zhang-Yan(Proc. A. (2022)))

さて, プレプリント [7] では, 初期値問題 (3)-(4) が十分大きな整数 m に対するソボレフ空間 $H^m(\mathbb{T};\mathbb{C}^n)$ で時間局所的に適切であるための, $\omega_{p,q,r}^{k,j}$ たちに対する十分条件を与えた. この設定では, $n=1$ の場合の具体例 (5) の整数 $m\geqslant 4$ に対する $H^m(\mathbb{T};\mathbb{C})$ での時間局所適切性が Segata(J. Differential Equations(2012)) によって得られているが, これが

唯一の先行結果であった. [7] は単独方程式に対するこの先行結果を n-成分連立系を含むように拡張したものである. それを定理として述べると次のようになる:

(B1) すべての $p,q,r,j \in \{1,\ldots,n\}$ に対し, $\omega^{1,j}_{p,q,r} = \omega^{1,j}_{r,q,p}$.
(B2) すべての $p,q,r,j \in \{1,\ldots,n\}$ に対し, $\omega^{1,j}_{p,q,r} = -\overline{\omega^{1,p}_{j,r,q}}$.
(B3) すべての $p,q,r,j \in \{1,\ldots,n\}$ に対し, $\omega^{2,j}_{p,q,r} = -\overline{\omega^{2,q}_{r,j,p}}$.
(B4) すべての $p,q,r,j \in \{1,\ldots,n\}$ に対し, $\omega^{3,j}_{p,q,r} = \omega^{3,j}_{r,q,p}$.
(B5) すべての $p,q,r,j \in \{1,\ldots,n\}$ に対し, $\omega^{3,j}_{p,q,r} = -\overline{\omega^{3,p}_{j,r,q}}$.
(B6) すべての $p,q,r,j \in \{1,\ldots,n\}$ に対し, $\omega^{4,j}_{p,q,r} = -\overline{\omega^{4,p}_{j,r,q}}$.

Theorem 1. ([7]) $M_a = aI_n$($a \neq 0$ で I_n は n 次単位行列) とする. また, $F(Q, \partial_x Q, \partial_x^2 Q)$ は (A1)-(A2) と (B1)-(B6) をすべてみたすとする. また, m を 4 以上の整数とする. このとき, (3)-(4) は $H^m(\mathbb{T};\mathbb{C}^n)$ で時間局所的に適切である.

Example 2. $n=1$ のとき, 「条件 (A1)-(A2) と (B1)-(B6) がすべて成立すること」と「すべての $k \in \{1,\ldots,4\}$ に対し, $\omega^{k,1}_{1,1,1} \in i\mathbb{R}$ であること」は同値である. したがって, Theorem 1 は, (5) に関する先行研究において「すべての $k \in \{1,\ldots,6\}$ に対して $i\mu_k \in i\mathbb{R}$」という設定下で $\mathbb{T}$ 上での時間局所適切性が得られていることと矛盾しない.

Example 3. $n \geqslant 2$ のときも含む具体例 (6) について, (3) の形で書き直すと, $M_a = (\gamma/2)I_n$, $M_\lambda = (\alpha/2)I_n$ となる. また, 条件 (A1)-(A2) と (B1)-(B6) もすべてみたされている.

Example 4. $n=2$ のとき, (A1)-(A2) と (B1)-(B6) の下では, 上の 2 例とは異なり, 一般に

$$\left\{\omega^{k,j}_{p,q,r} \mid p,q,r,j \in \{1,2\}\right\} \not\subset i\mathbb{R} \quad (k \in \{1,\ldots,4\})$$

である. これは単独方程式の場合と連立系の場合の相違点のひとつといえる.

Theorem 1 の証明は, ゲージ変換のアイデアに基づく修正版ソボレフノルムを用いた解の $H^m(\mathbb{T};\mathbb{C}^n)$ での評価と Bona-Smith タイプの放物型近似による. この方法自体は複素数値関数に対する単独の非線形分散型偏微分方程式の研究分野ではもはや標準的かもしれないと考えると, 主要な点は, 「条件 (B1)-(B6)」と「ソボレフノルムの修正の仕方」をどのように特定したかである. 本研究では, A の (1) の研究において, 複素 n 次元ケーラー多様体 N が局所エルミート対称であるときに $\nabla_x^m u_x$ がみたす方程式が初期値問題の可解性を保証する良い構造をもつことに着目した. そして, その $\nabla_x^m u_x$ がみたす方程式を [5] で作った一般化 Hasimoto 変換を利用して複素数値関数がみたす偏微分方程式の n-成分連立系に変換し, 上記の良い構造が $\partial_x^m Q$ がみたす n-成分連立系にどのように移植されているかを観察した. その移植後の構造を整理することによって (B1)-(B6) が特定された. また, (1) に対する [3,4] で用いた修正版幾何学的ソボレフノルムをこの一般化 Hasimoto 変換によって書き換えることにより, 修正版ソボレフノルムの形も特定された.

補足 1: 一般化 Hasimoto 変換は, Chang-Shatah-Uhlenbeck(Comm. Pure Appl. Math.(2000)) や Rodnianski-Rubinstein-Staffilani(Analysis and PDE (2009)) 等により Shrödinger flow の方程式 ((1) で $a,b,c=0$ としたもの) の解析に利用されてきた. [5] は, この方法を曲率テンソルの非線形項を含んでいる 4 階の方程式 (1) に対しても適用できるように整備しなおしたものである. そこでは, N が複素 n 次元コンパクトケーラー多様体の場合を統合的に扱った. (方程式 (1) は写像 $u=u(t,x)$ に沿うベクトル場の等式であるから, その写像に沿う x-方向に平行な moving frame を構成して, その frame に関する成分を調べることに

より, $\mathbb{C}$-値関数がみたす偏微分方程式の n-連立系がえられる.) さらに, 次の 3 つの N の例については, (1) の変換後の形をより詳細に与え, Ding-Zhong(Sci. China Math.(2021)) や Ding-Wang(Math.Z. (2018)) による先行結果との比較も行った.

- N が閉リーマン面の場合
- N 正則断面曲率が一定の場合
- N が複素グラスマン多様体の場合

ただし, この変換は $x \in \mathbb{R}$ であることと, 解が無限遠方で基点をもつ等の仮定のもので適用可能である. そのため, 本研究ではこの変換を $\mathbb{T}$ 上での問題 (3)-(4) を解くためのヒントとしては活用したが, 直接的に用いることができるかどうかについては更なる議論が要る.

補足 2: $x \in \mathbb{T}$ を $x \in \mathbb{R}$ に設定し直すと, 解に対する平滑化効果を使えるので, (B1)-(B6) のどれも課さずとも Theorem 1 は容易に示すことができる. さらに述べるなら, プレプリント [6] では, $x \in \mathbb{R}$ と設定したうえで, (非線形項への設定の詳細は割愛するが)(3) を少し一般化した非線形分散型偏微分方程式の n-成分連立系の初期値問題を考察し, [1] の方法に倣って, 整数 $m \geqslant 4$ に対する $H^m(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)$ での時間局所適切性を確認した. ただし, この結果自体は $x \in \mathbb{T}$ の場合に比べて予想しやすいものである. 特に $n = 1$(単独方程式) の場合は, 他の研究者による多くのより精密な先行研究があるため新規性は殆どない. しかしながら, [6] は, 以下の積分型の非局所項を含む行列値関数に対する偏微分方程式と $n \geqslant 2$ の場合の n-成分連立系の適切性を統合的に示した初の仕事ではある.

$$
\begin{aligned}
q_t = & -i\,\alpha\left\{q_{xx} + 2qq^*q\right\} + i\,\beta\left\{q_{xxxx} + 4q_{xx}q^*q + 2qq^*_{xx}q + 4qq^*q_{xx}\right. \\
& \left. + 2q_xq^*_xq + 6q_xq^*q_x + 2qq^*_xq_x + 6qq^*qq^*q\right\} \\
& - 2i\,(\beta + 8\gamma)\left\{(qq^*q)_{xx} + 2qq^*qq^*q\right. \\
& \left. + q\left(\int_{-\infty}^{x} q^*(qq^*)_s q\,ds\right) + \left(\int_{-\infty}^{x} q(q^*q)_s q^*\,ds\right) q\right\},
\end{aligned} \tag{7}
$$

ここで, $q = q(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathcal{M}_{k_0\times(n_0-k_0)}$ ($k_0 \times (n_0 - k_0)$ の複素行列の全体) で, $\beta \neq 0$ と α は実数の定数である. この (7) は, N が複素グラスマン多様体 G_{n_0,k_0}($1 \leqslant k_0 < n_0$ は整数) である場合の Generalized bi-Schrödinger flow の方程式 (あるいは (1)) に対する [5] の一般化 Hasimoto 変換の像として得られる. ただし, それ以前に Ding-Wang(Math.Z.(2018)) が, 一般化 Hasimoto 変換とは見かけ上異なる方法を用いて (7) を導出しており, さらに彼らの論文の中で (7) の初期値問題の時間局所解の存在が修正エネルギーの方法により証明可能であろうとの期待が表明されていた. [6] はその期待を解の一意性と初期値に対する連続依存性も含めて肯定的に確認したものとも言える.

参考文献

[1] H. Chihara and E. Onodera, Z. Anal. Anwend. **34** (2015), pp.221-249.
[2] E. Onodera, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. **147** (2017), pp.1243-1277
[3] E. Onodera, Differential Geom. Appl. **67** (2019) 101560, 26 pp.
[4] E. Onodera, J. Geom. Anal. **32** (2022), Article No.: 47, 41pp.
[5] E. Onodera, J. Geom. Anal. **34** (2024), Article No. 347, 55pp.
[6] E. Onodera, preprint (math.AP/2407.18605)
[7] E. Onodera, preprint(math.AP/2411.00452)

太陽光パネル火災時の建物周辺の煙流動

Zhang Xin

カーボンニュートラルの目標達成のため、太陽光発電などの再生可能エネルギーの普及・活用を進めることは喫緊の課題である。2021 年、世界の太陽光パネルの年間設備容量は 175GW に達し、日本の年間設備容量は 6. 5GW に達した。今後 2025 年 4 月から太陽光発電設置義務化制度が始まり、日本の太陽光発電市場は、さらに大きく成長すると予想される。

一方、太陽光パネルの普及は急速であり、その火災のリスクについての認識は十分でなく、防火の問題について研究上、法律上の対応は遅れているのが現状である。太陽光パネルの火災の原因は、自然災害、外部からの遮光、汚れによるホットスポットなどであり、基本的には避けられない要因である。太陽光パネルから屋根材への延焼を防ぐためには、太陽光パネルの下に銅板などの不燃材を設置することが有効な手段になっている。しかし火災における致命的な被害要因となる煙の挙動については、太陽光パネル火災を想定した対策や研究は殆どないのが現状である。

太陽光パネルの消火は感電の危険性があるため非常に困難であり、消火にかかる時間も非常に長くなる。したがって、有毒な煙が長時間発生するため、室内に侵入するリスクが高くなる。特に強風の場合、煙は瞬時に建物内に吹き込むため、建物や居住者の安全を脅かす危険性がある。

本研究では、火災時の煙の挙動をヘリウムの拡散に置き換える理論を提案し、CFD（Computational Fluid Dynamics）シミュレーションを用いてその理論の有効性を検証した。その理論を基礎として、実際の市街地風を模擬する大型境界層風洞を用いた実験を実施し、煙の温度に相当するヘリウム濃度を測定するとともに、建物内外の流速を画像計測することによって、縮尺模型を使用して建物に設置された太陽光パネルの火災煙流動を模擬する簡易風洞実験の方法論を構築する。さらに、この方法を利用して風速や発生量などの様々なパラメータを変化させた風洞実験を行い、太陽光パネル火災の煙流動における浮力と風の相互作用的挙動を捉え、煙が室内に侵入するメカニズムを解明するとともにその抑止対策を提案する。